

27/4/17

# Ασκήσεις

## Διημέριες τω

A1). Να εξετάσετε αν τα σημεία  $A(0,0,2)$ ,  $B(-1,0,1)$ ,  $C(3,4,5)$  και  $D(1,1,-2)$  ορίζουν επίπεδο και αν ναι να βρεθεί η αναductική εξίσωση τω.

Λύση:

$$\begin{array}{l} \vec{AB} = (-1, 0, 1) \\ \vec{AC} = (3, 4, 4) \\ \vec{AD} = (1, 1, -3) \end{array} \quad \left| \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 16 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right| = 0 \text{ άρα} \text{ (τότε υπάρχει 3 δι. σημεία)}$$

Αναductική εξίσωση:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} x-0 & y-0 & z-2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 16 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right| = 0$$

Συνταξε να γίνει 0

$$16x - 13y + 3z - 1 = 0$$

μπορεί άρα αναductική εξ.

Να βρεθεί η εξίσωση τω επιπέδω που διέρχεται από το σημείο  $P(2,1,-1)$  και είναι κάθετο στα επιπέδα  $(\pi_1) 2x + y - 3 = 0$

$(\pi_2) x + 2y + 3 = 0$

$(\pi_1, \pi_2) = ;$

Θετω επίπεδο κάθετο στα διανύσματα

Λύση:

$$\vec{w}_1 = (2, 1, 0) \text{ καθ στο } \Pi_1$$

$$\vec{w}_2 = (1, 2, 1) \text{ καθ στο } \Pi_2$$

$$P(x, y, z) = \frac{1}{2}(x, y, z)$$

αν πάρω εξου

$$\vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = (1, 1, 3)$$

$$(\Pi): \langle (x-2, y-1, z+1), (1, 1, 3) \rangle = 0$$

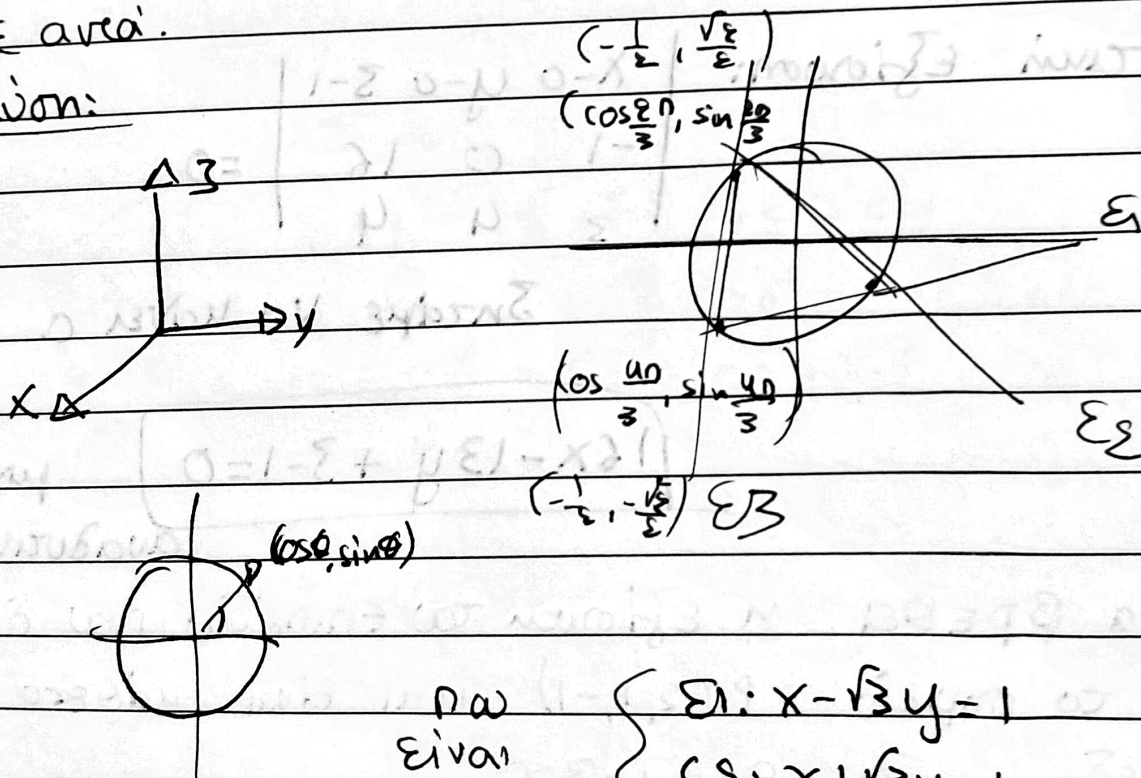
$$-\downarrow (\Pi, \Pi_2) = 0$$

$$-\downarrow (\Pi, \Pi_1) = 0$$

A3

Να δοθεί παράδειγμα επιπέδων  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  τα οποία τέμνονται ανά δύο υπό γωνία  $\pi/3$  στην οριζόντια να βρεθεί επίπεδο  $\Pi$  κάθετο σε αυτά.

Λύση:



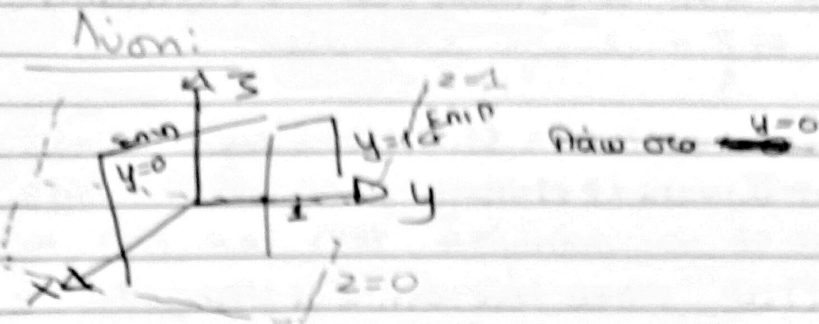
που είναι επίπεδα μέσα στο χώρο

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1: x - \sqrt{3}y = 1 \\ E_2: x + \sqrt{3}y = 1 \\ E_3: x = -1/2 \end{array} \right.$$

τίοντο βρισκω ευθείες.

( $\Pi$ )  $z=0$  κάθετο στα  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$

(Aa) Να δοθεί παράδειγμα επιπέδων  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$  τ.ω  $\pi_1 \parallel \pi_2, \pi_2 \parallel \pi_4, (\pi_1, \pi_3 \perp \pi_2, \pi_4)$



$$\begin{aligned} \text{πάρη} \left\{ \begin{aligned} (\pi_1) \quad y=0 \\ (\pi_2) \quad x=1 \end{aligned} \right\} &\rightarrow \vec{N}_1 = (0, 1, 0) \\ \text{πάρη} \left\{ \begin{aligned} (\pi_3) \quad z=0 \\ (\pi_4) \quad z=1 \end{aligned} \right\} &\rightarrow \vec{N}_2 = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

$\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 0$   
 άρα  
 κάθετα  
 $\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \pi_1, \pi_3 \perp \pi_2, \pi_4$

(As) Δίνονται τα σημεία  $A(1, 1, 2)$  και  $B(2, 0, -1)$ .  
 Ν.β ένα σημείο  $P$  στην ευθεία  $(\epsilon) \quad x=y=z$   
 έτσι ώστε η γωνία  $\hat{A}PB$  να είναι ορθή

Λύση:

$P(\lambda, \lambda, \lambda)$   
 $(\epsilon) \quad \vec{r} = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$   
 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$   
 $= (\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$   
 άρα οποιονδήποτε σημείο  $P$  πάνω στην ευθεία  $(\epsilon)$  θα έχει  $P(\lambda, \lambda, \lambda)$

$\vec{PA} = (1-\lambda, 1-\lambda, 2-\lambda)$   
 $\vec{PB} = (2-\lambda, -\lambda, -1-\lambda)$   
 παίρνω εσω γινόμενο και αναίρει  
 $\langle \vec{PA}, \vec{PB} \rangle = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 0$   
 άρα  $(0, 0, 0)$  ή  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

A6) Να δοθεί παράδειγμα παραλληλίων επιπέδων. Στη συνέχεια να βρεθεί η απόσταση τους καθώς και η εξίσωση του μεσοσπάρτη επιπέδου.

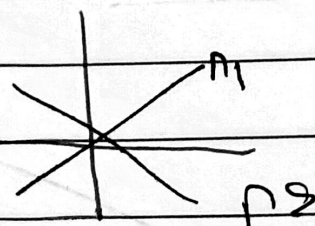
A7) Να βρεθούν επίπεδα  $(\pi_1), (\pi_2)$  τα οποία περιέχουν την ευθεία  $(\epsilon) = x = y = z$ .

A8) Να αποδείξετε ότι τα επίπεδα που διχοτομούν τις διέδρες γωνίες είναι κάθετα μεταξύ τους.

A6) Λύση  $\Sigma = 0, \Sigma = 1$   
 $\pi_1, \pi_2$   
 Μεσοσπάρη  $\Sigma = 1/2$   
 $d(\pi_1, \pi_2) = 1$

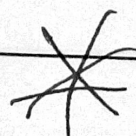
A7) Λύση  $x = y$  ( $\pi_1$ )  
 $y = z$  ( $\pi_2$ )

A8) Λύση  
 $A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0$  ( $\pi_1$ )  
 $A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0$  ( $\pi_2$ )  
 Εξισώσεις επιπέδων που διχοτομούν  
 τα  $\pi_1, \pi_2$  :



$$(\pi_3): \frac{A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2}} = \mu = \frac{A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}} = \nu$$

$$(\pi_4): \frac{-A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}}$$



A9

Να εξετάσετε αν οι ευθείες

$$(E_1) = \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$$

$$(E_2) = \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

Είναι συμβατές, και αν ναι, να προσδιορίσετε το  
Επίκεντρο στο οποίο αυτές είναι. Στη συνέχεια αν  
οι  $(E_1)$  και  $(E_2)$  τέμνονται και αν ναι να βρείτε  
ευθεία  $(\epsilon)$  κάθετη σε αυτές.

Λύση:  $\vec{a} = (1, 2, 3)$

$\vec{b} = (2, -1, 2)$

$$\begin{cases} A = (1, 1, -2) \\ B = (-2, 5, -3) \end{cases} \Rightarrow \vec{AB} = (-3, 4, -1)$$

Συνέχεια Α9

$$\vec{N_3} = \left( \frac{A_1 - A_2}{\mu}, \frac{B_1 - B_2}{\nu}, \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\nu} \right)$$

$$\vec{N_4} = \left( \frac{-A_1 - A_2}{\mu}, \frac{B_1 - B_2}{\nu}, \frac{-\Gamma_1 - \Gamma_2}{\nu} \right)$$

$$\langle \vec{N_3}, \vec{N_4} \rangle = 0 \text{ άρα κάθετες}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \dots = 0 \text{ άρα συμβατές οι } (E_1), (E_2)$$

Πάω να βρω παραμετρική εξίσωση της Ε1

|      |                     |      |                 |
|------|---------------------|------|-----------------|
| (Ε1) | $x = 1 + \lambda$   | (Ε2) | $x = -2 + 2\mu$ |
|      | $y = 1 + 2\lambda$  |      | $y = 5 - \mu$   |
|      | $z = -2 + 3\lambda$ |      | $z = -3 + 2\mu$ |

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

ορίζονται ανεξάρτητα + 0  
άρα παραδοχή λένε

$$\begin{cases} 1 + \lambda - 2 + 2\mu \\ 1 + 2\lambda + 5 - \mu \\ \cancel{2 + 3\lambda - 3 + 2\mu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 2\mu = 3 \\ 2\lambda + \mu = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases} \text{ άρα το } P_0(2, 3, 1)$$

Σημείο κομής των (Ε1) και (Ε2).

$$P_0(2, 3, 1)$$

Κάθετη ευθεία στις (Ε1) και (Ε2)

$$\vec{N} = \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \quad \text{και} \quad P_0(2, 3, 1)$$

Επίπεδο στο οποίο (Ε1) και (Ε2) βρίσκονται

$$\langle (x-1, y-1, z+2), \vec{\alpha} \times \vec{\beta} \rangle = 0$$

A10 Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 2, 2)$ ,  $B(4, 5, 6)$  καθώς και η ορθή προβολή της στο επίπεδο

$$(n) \quad 8x + 7y - 6z = 5$$

Στη συνέχεια να βρεθεί το συμμετρικό

του σημείου  $P(10, 2, 12)$  ως προς το επίπεδο (n)

Λύση:  $\vec{AB} = (3, 3, 3)$

$$(E) \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3}$$

Ορίση προβολής της (E) στο (η)  
κάθετο στο (η):  $\vec{N} = (8, 7, -6)$

Επίπεδο που διέρχεται το  $A(1, 2, 3)$  και  
παράγεται από τα διανύσματα  $\vec{AB}$  και  $\vec{N}$  ...  
 $13x - 14y + 33z = 0$

Επειδή  $P \in (\eta) \Rightarrow$  Το συμμετρώ είναι ο  
εαυτός του.

Άσκ Έστω επίπεδο (η) με ολυνες επί των αξών  
 $a, b, c$ . Αν η αξή των αξών έχει απόσταση  $d$   
από το (η) τότε υ.δ.ο  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$

Λύση:

Εξίσωση επιπέδου

$$(η) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Άρα  $d(0, \eta) = d \Rightarrow \frac{|1-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = d \Rightarrow V$